

10 u 10

ANJA HOGE, STELLA OŽBOLT, IZABEL MARIA RAJŠEL¹, MENTOR: SANJA JANEŠ²

Svake godine Društvo matematičara i fizičara iz Rijeke raspisuje natječaj za projekte u okviru Festivala znanosti iz matematike i fizike za osnovne i srednje škole. Cilj natječaja je popularizirati matematiku i fiziku. Festival znanosti još se održava i u Zagrebu, Osijeku, Rabu, Splitu i Zadru nizom manifestacija, predavanja, izložbi i demonstracija otvorenog tipa na kojima se učenici i svi drugi zainteresirani upoznaju s bogatstvom i nužnošću matematike i fizike. Dosad su teme bile vrlo raznolike. Evo tek nekih: *Evolucija - i tu je matematika*, *Zemlja očima matematičara*, *Svjetlost – geometrija koja nas okružuje...* Ove godine tema je imala vrlo jednostavan naziv: „10”. Prema nazivima tema vidi se da je pružena velika širina sadržaja koji se mogu uklopiti u matematiku.

Kako je zadatak projekta popularizirati matematiku među učenicima, poželjno je da u njemu sudjeluju učenici raznolikih matematičkih sposobnosti. Širina teme omogućuje da učitelj za svakog učenika koji sudjeluje u projektu predvidi njemu prikladan sadržaj koji može sam odraditi. To učenika čini ravnopravnim i zadovoljnim sudionikom pri izradi projekta.

Rezultat projekta „10 u 10” lijepa je matematička priča protkana geometrijom, algebrom i aritmetikom. U korelaciji je s najrazličitijim matematičkim sadržajima redovne, ali i dodatne nastave. Učenici u projektu primjenjuju i modeliraju stečena znanja u potpuno drukčijim situacijama nego u redovnoj nastavi. To su spontane situacije na koje nailazimo u razradi projekta koji se provodi, direktno diskutirajući s učenicima. U diskusijama se pojavljuju problemi i ideje koje učenici sami matematički modeliraju te pronalaze rješenja.

Pri razgovoru s učenicima i istraživanju otvorila su se mnoga vrata, pa smo odlučili odškrinuti njih deset. Tako je i nastao naziv projekta: „10 u 10”. Na samom početku istraživanja naišli smo na matematičaru očekivane činjenice o broju 10: Savršen broj, Trokutni broj, Tetraedarski broj, Broj 10 u religiji. Zanimljivo je bilo kako su učenici prikaz u binarnom brojevnom sustavu prepoznali kao vezu s brojem 10 zbog istog zapisa, ali svjesni različitosti značenja.

¹Učenice 7. razreda OŠ „Petar Zrinski”, Čabar

²Sanja Janeš, prof. matematike u OŠ „Petar Zrinski”, Čabar

Dakle, pristup razlika/sličnost. Veliko iznenađenje za mene kao mentora bila je činjenica o postojanju 10-satnog dana iz doba Francuske revolucije. Na internetu postoje i fotografije antiknih satova prilagođenih za takav način mjerenja vremena. Nažalost, fotografije s interneta zabranjene su za korištenje u projektu pa ih nismo mogli priložiti. Više o tome može se naći na adresi <http://pebblez.com/blog/decimal-time-and-100-minute-clocks/>.

Središte naše priče je popločivanje ravnine deseterokutom. Kako učenice koje su izradile projekt pohađaju 7. razred, potpuno im je bilo prirodno da se sjete pravilnog deseterokuta. Naravno da nisu same došle do problema popločivanja. To je bilo pitanje koje sam ja postavila. Odgovor na njega pravi je mali istraživački rad s težinom dodatne nastave. No opet, i u tom se dijelu mogu uočiti dijelovi koje su odradili učenici koji ne idu na dodatnu nastavu. Najzanimljivija je bila demonstracija popločivanja deseterokutom. Tu se dogodio *heureka*-efekt i, naravno, veliko zadovoljstvo, moje i učeničko. Vjerojatno je dio o popločivanju zaslužan za osvojeno 1. mjesto.

U izradi projekta sudjelovale su učenice 7. razreda: Anja Hoge, Stella Ožbolt i Izabel Maria Rajšel iz OŠ „Petar Zrinski” iz Čabra s mentoricom Sanjom Janeš.

Teorem Marion Walter je zanimljiv, ali učenicima pretežak za raspravu. No, uočili smo kako je dinamična geometrija pogodna za istraživanje. Također smo ponovili dijeljenje dužine na jednake dijelove i teorem o paraleli.

Ideja za pjesmu u desetercu pokazuje da ni jezik i književnost nisu oslobođeni matematike.

Na kraju je važno napomenuti da se učitelj u ovoj situaciji također nalazi u ulozi učenika jer u pripremi projekta nailazi na teme s kojima se još možda nije susretao. Proučavajući ih i istražujući, prije nego ih predstavi učenicima, obogaćuje vlastito matematičko znanje.

Predstavljanje projekta „10 u 10”

Istražujući broj 10 naišli smo na mnogo zanimljivih stvari. Proučili smo ih i predstavili u ovom projektu. Putujući s brojem deset prošli smo kroz:

- matematiku
- povijest
- informatiku
- književnost
- glazbu
- likovnu umjetnost

Teme koje smo obradili kroz broj 10 su sljedeće:

1. Savršeni broj
2. Trokutni broj
3. Tetraedarski broj
4. Zapis u Sketchpadu
5. Zapis u binarnom i dekadskom sustavu
6. Deset i vrijeme
7. Deset u geometriji
8. Deset u religiji
9. Deset u površini trokuta
10. Deseterac

1. Savršeni broj 10

Za Pitagorejce je 10 bio savršeni broj. Broj 10 jednak je zbroju prva četiri prirodna broja.

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

2. 10 kao trokutni broj

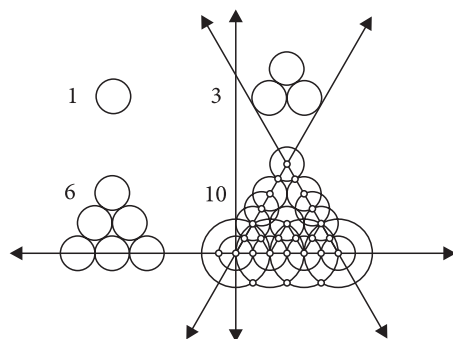
Trokutni brojevi predstavljaju množinu koja se može posložiti u obliku trokuta. Svi trokutni brojevi jednaki su zbroju nekih svojih uzastopnih prethodnika i zadovoljavaju formulu

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \text{trokutni broj}$$

Broj 10 je četvrti trokutni broj.

Broj 10 jednak je i zbroju prva tri trokutna broja: $1 + 3 + 6 = 10$

Iz te činjenice proizlazi i novo svojstvo broja 10.



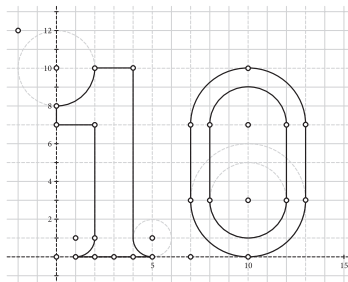
3. Broj 10 je tetraedarski broj

To znači da broj 10 predstavlja množinu koja se može prikazati kao tetraedarski obujam. Izradili smo model od plastelina.

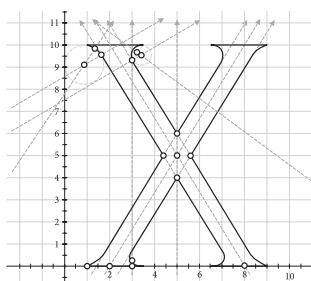


4. Kako broj 10 izgleda u *Sketchpadu*?

Konstruirali smo zapis broja 10 arapskim brojkama u *Sketchpadu*. Konstrukciju smo radi jednostavnosti radili u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini.

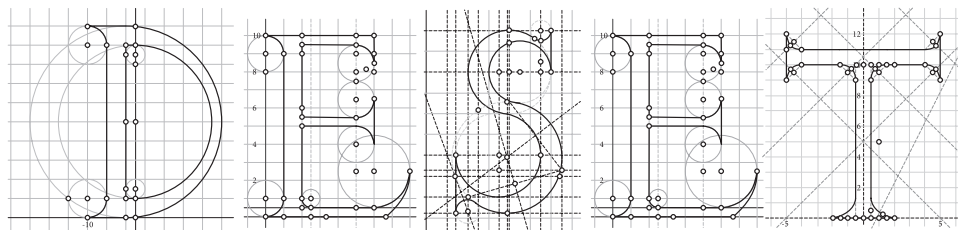


Naravno da nismo mogli preskočiti zapis broja 10 rimskim brojem. Tu nam je bilo potrebno malo više vještine jer smo morali koristiti konstrukciju tangente u točki na kružnici.



Da bi dojam broja 10 u *Sketchpadu* bio potpun, konstruirali smo i njegov lijepi latinični zapis.

LIJEPI DESET

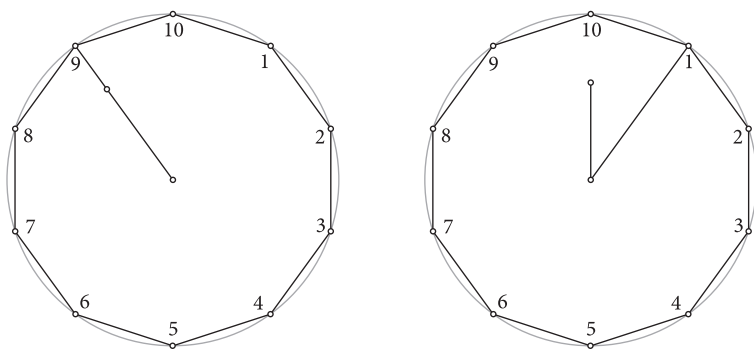


5. Broj 10 i vrijeme

Čovjek živi sa svojim navikama misleći da je sve što koristi oduvijek tako bilo, te da će takvo i ostati. Sljedeći primjer dokazuje da tomu nije tako.

U kalendaru Francuske revolucije broj 10 igrao je važnu ulogu. Svaki je mjesec bio podijeljen u tri **desetodnevna tjedna**. **Deseti dan** bio je dan za odmor. Tjedni su se zvali „**dekade**”. Svaki je **dan** bio podijeljen u **deset sati**, svaki sat na 100 decimalnih minuta, a svaka minuta na 100 decimalnih sekundi.

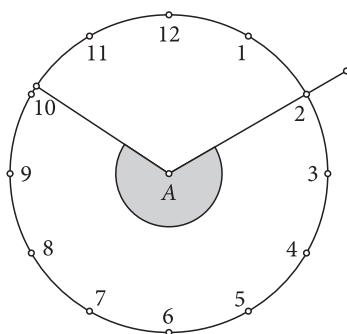
Nakon 12 godina desetodnevnog sata Napoleon je ukinuo „kalendar Francuske revolucije” u 1806. godini. Zanimalo nas je kako je izgledao desetosatni sat pa smo ga nacrtali.



Sad jedan mali zadatak za čitatelja. Koliko sati pokazuju ovi „revolucionarni satovi”?

Vratimo se sada „normalnome” satu. Proučili smo, nacrtali i izračunali:

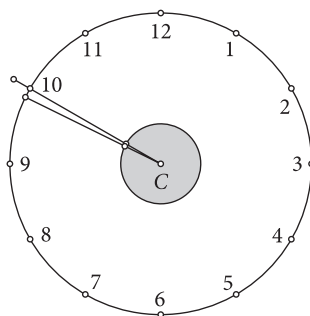
1. Koliki kut zatvaraju kazaljke u 10 sati i 10 minuta?



Od znamenke 2 do 10 je 8 puta po 30° , a to iznosi 240° .

Velika kazaljka prošla je 10 minuta, a to je šestina sata. Dakle, mala je kazaljka prešla šestinu od 30° . Put male kazaljke, dakle, iznosi 5° . Kazaljke sata u deset sati i deset minuta zatvaraju kut od 245° . ($240^\circ + 5^\circ = 245^\circ$)

2. Koliki kut zatvaraju kazaljke u 10 minuta do 10 sati?



Uočili smo da je u kutu 11 puta po 30° , dakle, sve skupa 330° . Kako smo u prošlom zadatku izračunali da onaj mali dio iznosi 5° , samo smo dalje zbrojili ($330^\circ + 25^\circ = 355^\circ$).

Kazaljke sata u deset minuta do deset sati zatvaraju kut od 355° .

6. Dekadski i binarni zapis

Dekadski brojevni sustav je sustav s brojevnom bazom 10, što znači da ukupno ima 10 znamenaka, a sve brojeve dekadskog sustava moguće je predstaviti pomoću znamenaka od 0 do 9.

Na primjer:

$$12305 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

U binarnom sustavu baza je broj 2. Pri zapisivanju brojeva u binarnom sustavu koristimo samo dvije znamenke: 0 i 1.

Odredili smo:

1. Kako u binarnom sustavu zapisujemo broj deset?

Binarni zapis broja tvore ostaci dijeljenja brojem 2, čitani/zapisani „odozdo prema gore”:

$10 : 2 = 5$	0
$5 : 2 = 2$	1
$2 : 2 = 1$	0
$1 : 2 = 0$	1

Dekadski broj 10 ima binarni zapis 1010

2. Koji je broj iz dekadskog sustava zapisan u binarnom sustavu kao 10?

$$10 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2$$

Broj 2 u binarnom zapisu izgleda kao 10.

7. Kako 10 izgleda u geometriji?

Proučimo broj 10 preko pravilnog deseterokuta.

Možemo li ravninu potpuno ispuniti samo pravilnim deseterokutima? Problem popunjavanja ravnine pravilnim mnogokutima zove se popločivanje ravnine ili *parketiranje*.

Postoji:

1. Pravilno popločivanje - istovrsni pravilni mnogokuti
2. Arhimedovo popločivanje - viševrsni pravilni mnogokuti
3. Penroseovo popločivanje - popločivanje koje dopušta i prekrivanja

1. Pravilno popločivanje

Da bismo popunili ravninu pravilnim istovrsnim mnogokutima, mora biti ispunjen uvjet da zbroj svih kutova u točki sastavljanja pravilnih mnogokuta bude 360° stupnjeva, tj.

$$k \cdot \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 360^\circ$$

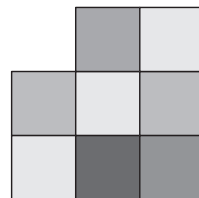
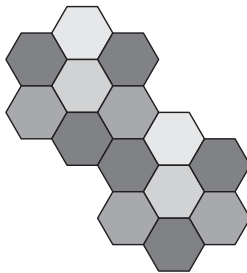
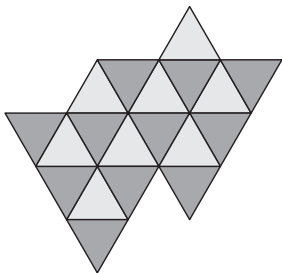
Ovo je diofantska jednadžba. Saznajmo koliki može biti n ! Skraćivanjem sa 180° te množenjem s n dobijemo izraz za k .

$$k \cdot \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 360^\circ \text{ tj. } k = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

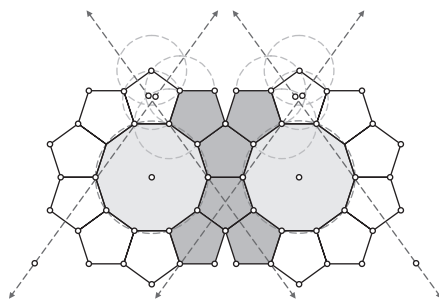
Budući da je k prirodan broj, $n - 2$ mora biti djeljitelj broja 4.

Dakle, ostaju tri primjenjive mogućnosti: n može biti 3, 4 ili 6.

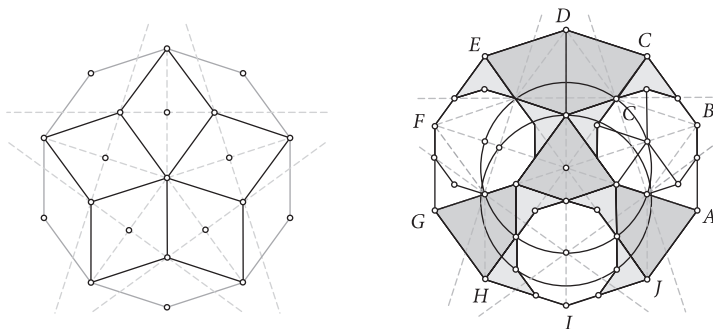
U pravilnom popločivanju imamo pravilne trokute, četverokute i šesterokute, ali ne i deseterokute! Sami smo konstruirali ova pravilna popločivanja.



2. Ni u Arhimedovim popločivanjima ne postoji popločivanje pravilnim deseterokutom. Pogledajmo primjer.



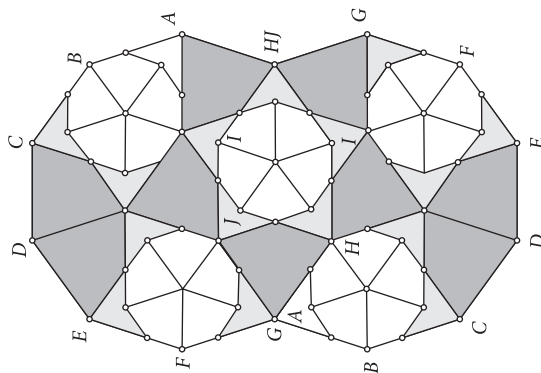
3. Najljepše popločivanje deseterokutom pronašli smo u Penroseovom popločivanju.



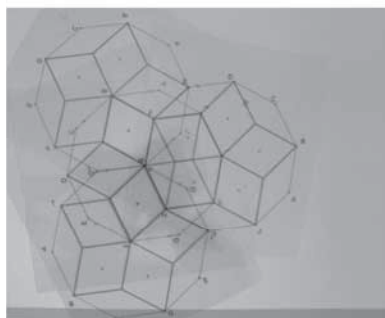
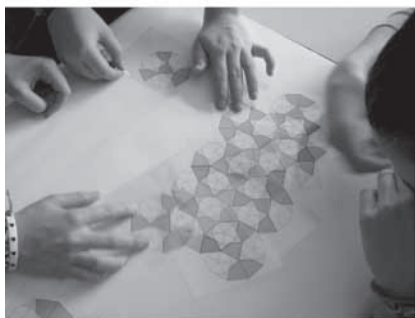
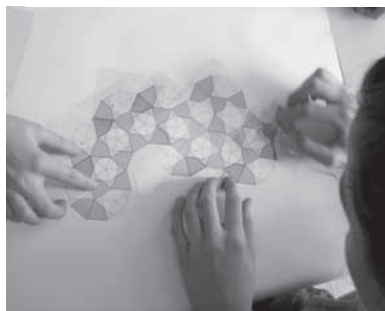
- konstruirali smo pravilni deseterokut
- u njemu smo konstruirali rombove sa stranicama iste duljine kao i deseterokut
- zatim smo konstruirali „zmajeve” (plavo) i „strjelice” (žuto).

Ovi nam likovi pomažu pri preklapanjima.

Slaganjem i preklapanjem deseterokuta popločili smo ravninu pravilnim deseterokutima. Ovo je 1996. demonstrirala njemačka matematičarka Petra Gummelt.



Isprintali smo na foliju konstruirane deseterokute i slagali ih na podlogu.



8. Broj 10 u religijama

Broj deset je poseban broj u mnogim religijama. Mi smo odabrali ove:

1. judaizam
2. kršćanstvo
3. hinduizam

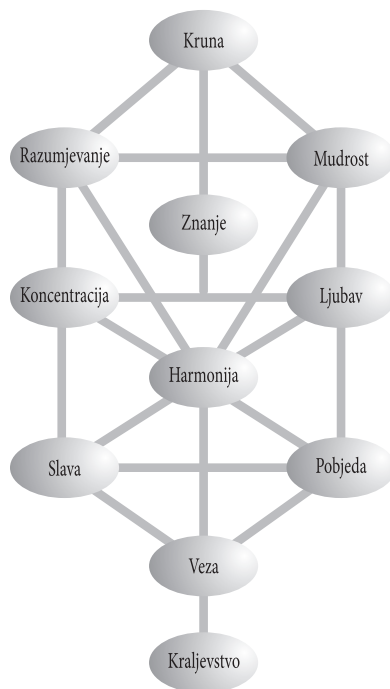
1. Judaizam – židovstvo

U Kabali je zapisano i grafički prikazano 10 vrlina koje bi čovjek trebao imati odnosno težiti im. Svaka vrлина predstavlja dio tijela.

Kruna (Keter) jedini je dar koji ne predstavlja jedan dio tijela.

Kruna je božanska i drži ostale darove na okupu.

1. znanje (Da'at) - mali mozak
2. mudrost (Chocoma) - veliki mozak
3. razumijevanje (Bina) - srce



4. ljubav (Chesed) - desna ruka
5. koncentracija (Din) - lijeva ruka
6. harmonija (Tiferet) - trup
7. pobjeda (Neach) - desna noga
8. slava (Hod) - lijeva noga
9. veza (Yesod) - spolni organ
10. kraljevstvo (Malchut) – govor (jezik)

2. Kršćanstvo

Deset zapovijedi

1. Ja sam Gospodin, Bog tvoj, nemoj imati drugih bogova uz mene!
2. Ne izusti imena Gospodina, Boga svoga, uzalud!
3. Sjeti se da svetkuješ dan Gospodnji!
4. Poštuj oca i majku da dugo živiš i dobro ti bude na zemlji!
5. Ne ubij!
6. Ne sagriješi bludno!
7. Ne ukradi!
8. Ne reci lažna svjedočanstva na bližnjega svoga!
9. Ne poželi žene ni muža bližnjega svoga!
10. Ne poželi nikakve stvari bližnjega svoga!

3. Hinduizam

Hinduizam uči da će se bog Vishnu reinkarnirati 10 puta. Vishnu se dosad reinkarnirao 9 puta. Kalki, tj. zadnji, deseti put - još se nije dogodio. Mi smo sada u devetoj reinkarnaciji, Buddha. Te reinkarnacije zovu se avatari.

10 Avatara:

1. Matsya - Riba
2. Kurma - Kornjača
3. Varaha - Vepar
4. Narasimha - Lav-Čovjek
5. Vamana - Patuljak Brahmin
6. Parashurama
7. Rama
8. Krishna
9. Buddha
10. Kalki

9. Broj 10 i trokut se vole

Zahvaljujući dinamičnoj geometriji, matematičarka Marion Walter dobila je ideju za tvrdnju koja je kasnije dokazana i nazvana *Teorem Marion Walter* (reference na kraju teksta). Dokaz smo pronašli, ali za nas je pretežak, pa smo traženo konstruirali i napravili izračun.

Tvrdnja: Spajanjem trećina stranica s nasuprotnim vrhovima proizvoljnog trokuta, u unutrašnjosti trokuta dobije se šesterokut koji ima 10 puta manju površinu od početnog trokuta.

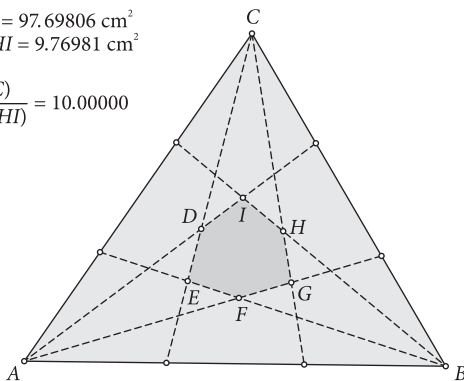
Mi smo u *Sketchpadu* konstruirali trokut. Zatim smo jednu stranicu podijelili na tri jednaka dijela. Ostale dvije stranice konstruirali smo na tri jednaka dijela koristeći teorem o paraleli.

Spojili smo vrhove trokuta s nasuprotnim trećinama. Presjekom tih spojnica dobili smo šesterokut unutar trokuta. Omjer površina trokuta i dobivenog šesterokuta je 10 : 1.

Sketchpad računa površine s preciznošću na pet decimala.

$$\begin{aligned} \text{Površina } \triangle ABC &= 97.69806 \text{ cm}^2 \\ \text{Površina } DEFGHI &= 9.76981 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{(\text{Površina } \triangle ABC)}{(\text{Površina } DEFGHI)} = 10.00000$$



10. Deseterac

U desetercu su pisane mnoge naše narodne pjesme. Deseterac je stih sastavljen od deset slogova. Anja je sastavila deseterac o matematici.

*Matematiku mora uvijek znat'
svaki učenik dobro računat'
Teško će ti u životu biti
Ako ju ne`š dobro razumjeti
Zato ju uči dok si u školi
Sve, ama baš sve brojeve voli.*

Literatura:

1. Conway, J. H. „Re: Marion’s Theorem.” geom.pre-college discussion group, Jan 12, 1995. <http://mathforum.org/epigone/geom.pre-college/111/9501120604.AA01003@broccoli.princeton.edu>.
2. Johanson, D. „Re: Marion’s Theorem.” geom.pre-college discussion group, Jan 12, 1995. [http://mathforum.org/epigone/geom.pre-college/111/3emro3\\$7ep@newsbf02.news.aol.com](http://mathforum.org/epigone/geom.pre-college/111/3emro3$7ep@newsbf02.news.aol.com).
3. Maushard, M. From the *Baltimore Sun*. Clipped from the *Arkansas Democrat-Gazette* 12/21/94.
4. Morgan, R. „No Restriction Needed. *The Mathematics Teacher* **87**, 726 and 743, 1994.
5. Sloane, N. J. A. Sequence A060544 in „The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.”
6. Walter. „Re: Morgan’s Theorem.”geom.pre-college discussion group, Feb 3, 1995. http://mathforum.org/epigone/geometry-forum/27/950203131054_74730.2425_EHB162-1@CompuServe.COM
7. Marion’s theorem (*Mathematics Teacher* 1993., Maushard 1994., Morgan 1994.)